Das Vektorprodukt

Wir definieren erneut eine Multiplikation zwischen zwei Vektoren, das **Vektorprodukt**, nicht zu verwechseln mit dem Skalarprodukt.

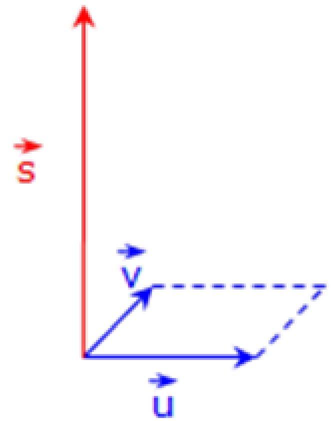
Schreibe hierzu die Vektoren zweimal untereinander und streiche die obere und untere Zeile.

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 \\ a_3 b_1 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 b_2 \\ a_1 b_3 \\ a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Bilde Produkte entlang der blauen und roten Linien und berechne „blaue“ Produkte minus „rote“ Produkte.

Eigenschaften des Vektorprodukts

Im Vergleich zum Skalarprodukt ist das Ergebnis des Vektorprodukts ein Vektor, nicht ein Skalar!



Der Ergebnisvektor steht senkrecht auf den beiden ursprünglichen Vektoren!

Die Länge des Ergebnisvektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ „aufgespannt“ wird.

Wozu braucht man das Vektorprodukt?

Das Vektorprodukt ist häufig hilfreich, wenn man einen Normalenvektor ermitteln soll oder die Darstellungsform einer Ebene in eine andere umwandeln muss.

Rechenbeispiel 1

Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimme das Vektorprodukt.

Lösung:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{4} \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} \end{array} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

Rechenbeispiel 2

Gegeben ist eine Ebene mit $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimme einen Normalenvektor zu E.

Lösung: Bilde das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{array}{cc} \cancel{0} & \cancel{5} \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ -3 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{0} \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 5 \\ 0 \cdot 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \\ -3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Einen Normalenvektor bestimmen

Wir haben nun gesehen, wie man mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor senkrecht zu zwei gegebenen Vektoren bestimmen kann.

Es gibt aber noch einen weiteren Weg.

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben sind, und $\vec{n}$ senkrecht zu beiden Vektoren stehen soll, so muss sowohl $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ als auch $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ gelten.

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich $\vec{n}$ bestimmen lässt.

Wir zeigen dies an einem Rechenbeispiel.

Rechenbeispiel

Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist ein Vektor $\vec{n}$, der sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch senkrecht auf $\vec{b}$ steht.

Lösung:

Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Damit folgt $\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Lösung

Daraus ergibt sich das folgende LGS:

$I.\ -2a + 2b - c = 0$ und $II. 2a + 3b + c = 0$

Das LGS hat mehr Variablen als Gleichungen, d.h. wir können eine der Variablen, sagen wir c, frei wählen.

Für c wählen wir einen möglichst einfachen Wert, aber nicht $c = 0$, denn dann wären auch $a = 0$ und $b = 0$, was uns jedenfalls nicht zu einem von $\vec{0}$ verschiedenen Normalenvektor führt.

Daher wählen wir z.B. $c = 1$.

Jetzt haben wir $I.\ -2a + 2b - 1 = 0$ und $II.\ 2a + 3b + 1 = 0$

$$I.\ -2a + 2b - 1 = 0$$
$$II.\ 2a + 3b + 1 = 0$$

Lösung

Es folgt $I.\ -2a + 2b = 1$ und $II.\ 2a + 3b = -1$.

Addition der beiden Gleichungen liefert $5b = 0$ also $b = 0$.

Eingesetzt in $II.$ liefert dies $a = -\frac{1}{2}$.

Schließlich haben wir mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Normalenvektor gefunden, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

Bemerkung

Ob Sie nun einen Normalenvektor mit Hilfe des Vektorprodukts oder mit dem Skalarprodukt und anschließendem Lösen eines LGS bestimmen, bleibt natürlich Ihnen überlassen.

Das ist wohl eine reine Geschmacksfrage.

Beide Lösungswege sind ähnlich aufwändig.